



فصل سوم

روابط طولی در مثلث





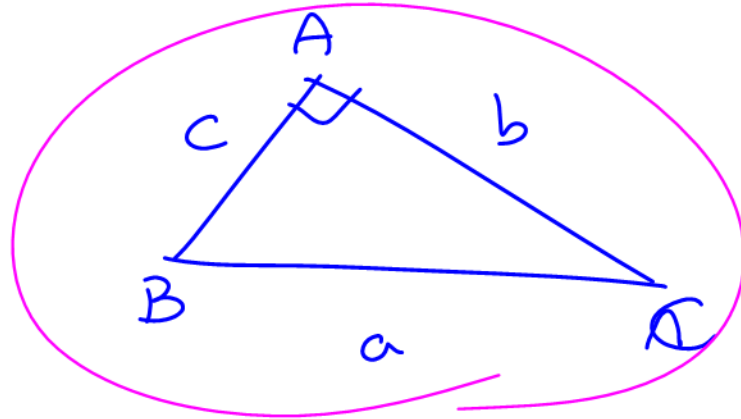
جاهای خای را با عبارت‌های مناسب پر کنید:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه دایره محیطی.

در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه دایره محیطی.

در هر مثلث دلتخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن برابر است با دایره محیطی.

نتیجه



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

در قضیه کسینوس‌ها، مربع هر ضلع برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر منهای حاصل ضرب آن دو ضلع در سینوس زاویه روبه‌رو.

در مثلث ABC، اگر $a=10$ ، $b=8$ و زاویه $\hat{C}=120^\circ$ باشد، طول ضلع c برابر است با $\sqrt{244}$.

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C \Rightarrow c^2 = 100 + 64 - 2(8)(10)\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow c^2 = 244 \rightarrow c = \sqrt{244}$$

در مثلث ABC، اگر $a=6$ ، $b=8$ و زاویه $\hat{A}=30^\circ$ باشد، سینوس زاویه B برابر است با $\frac{1}{2}$.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2}$$



درست یا نادرست بودن هر یک از عبارات های زیر را تعیین کنید.

۱- در قضیه سینوس ها، نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن برابر با قطر دایره محاطی مثلث است. نادرست

۲- در مثلث ABC، اگر $a=10$ ، $b=8$ و $c=12$ باشد، مساحت آن برابر با $15\sqrt{7}$ است. درست

$$p = \frac{10+8+12}{2} = 15$$

$$S = \sqrt{15 \times 5 \times 7 \times 3} = 15\sqrt{7}$$

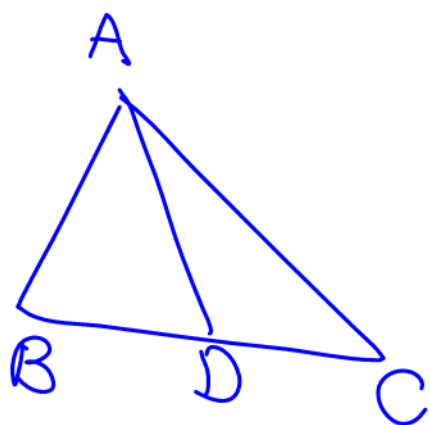
۳- در مثلث ABC اگر نیمساز AD را رسم کنیم آنگاه داریم: $AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$ نادرست



$$AD^2 =$$

۴. طبق قضیه هرون قضیه هرون، مساحت مثلث با اضلاع a ، b و c برابر است با $\frac{P(P-a)(P-b)(P-c)}{S^2}$ درست

$$S^2$$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{CB}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

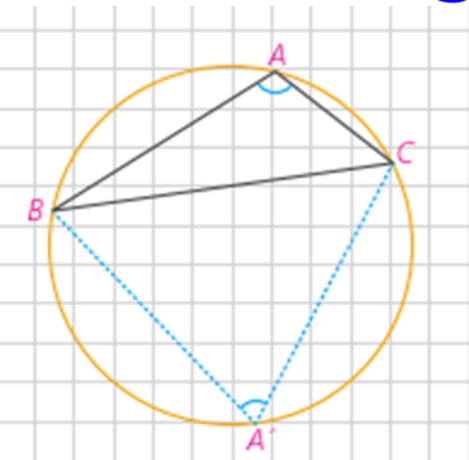
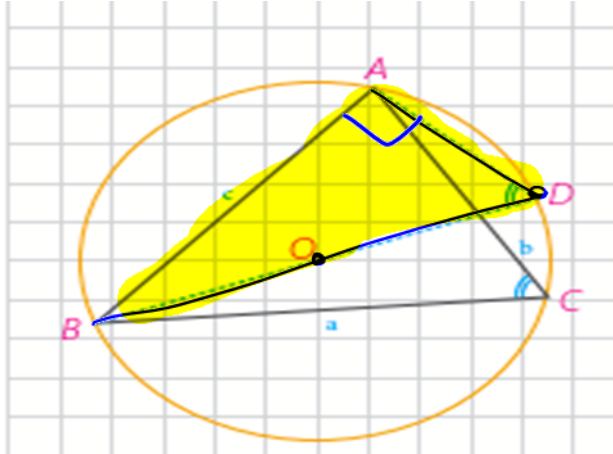
۵- در مثلث ABC اگر نیمساز AD را رسم کنیم آنگاه داریم: نادرست



قضیه سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $AB=c$ و $AC=b$ ، $BC=a$ داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} =$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.



مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.

قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم.

۱- زوایای C و D چرا با هم برابرند؟

اندازه آنها برابر است با نصف

۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{AB}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

با استدلال مشابه، داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

در نتیجه



پوشش علمی
ماندگار البرز



پوشش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز

حل: به کمک قضیه سینوس‌ها می‌توان نوشت:

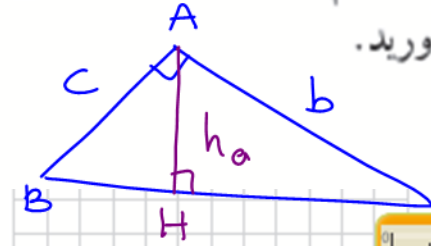
$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ} = 2R \text{ و } \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ و } R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{10\sqrt{6}}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow B = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ \text{ و } \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \hat{C} = 15^\circ$$

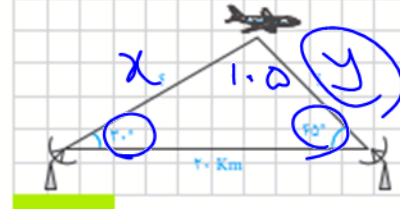
مثال ۱: در مثلث ABC ، $BC = 10 \text{ cm}$ و $\hat{A} = 120^\circ$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زوایای \hat{B} و \hat{C} را به دست آورید.



۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

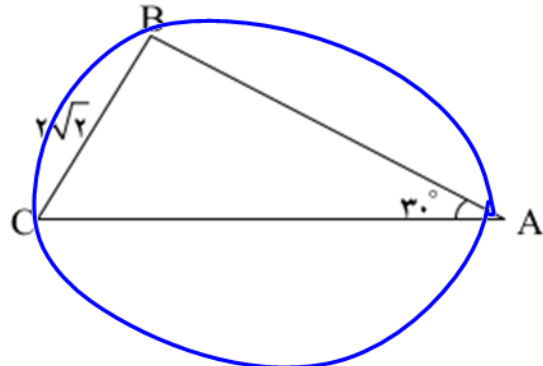
۲- دو ایستگاه رادار، که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های 30° و 45° درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



۶۵

شعاع دایره‌ای که از راس‌های مثلث مقابل می‌گذرد رابه دست آورید.

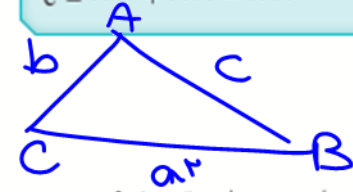
$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



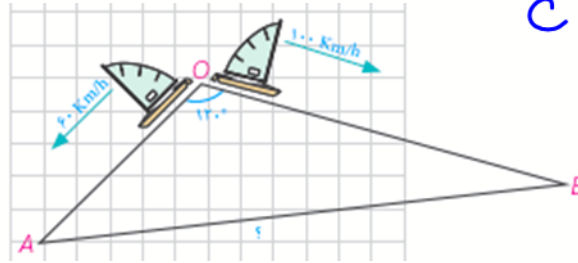
قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آنها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = \dots + \dots - \dots$$

$$c^2 = \dots + \dots - \dots$$


مثال: دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های ۶۰ km/h و ۱۰۰ km/h و با زاویه ۱۲۰° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



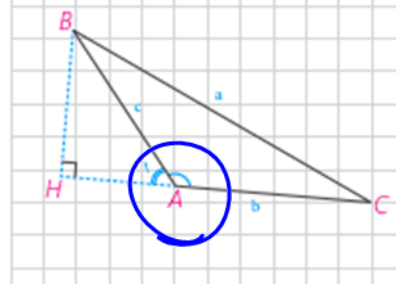
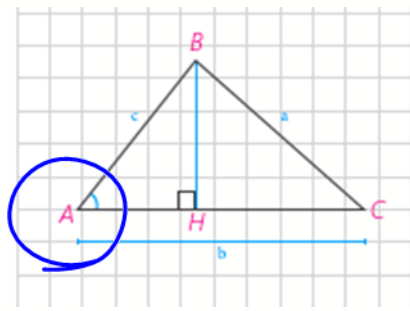
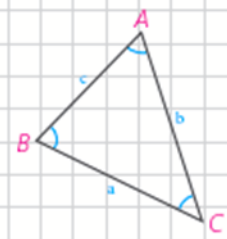
کاردرکلاس

در مثلث ABC، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$

۱- طول ضلع BC را به کمک قضیه کسینوس‌ها به دست آورید.

$$BC^2 = \dots^2 + \dots^2 - 2 \times \dots \times \dots \times \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots + \dots - \dots \Rightarrow$$

$$BC^2 = \dots \text{ و } BC = \dots$$


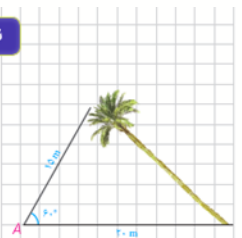
تمرین

۱- یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

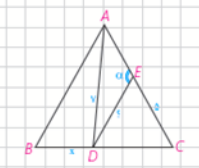
الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

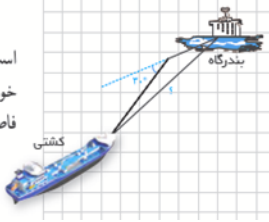
پ) فاصله نوک درخت از زمین



۲- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع AC، نقطه D، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ (CD > BD)، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه AED چند درجه است؟



۳- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



در شکل روبرو طول پاره خط DE چقدر است؟

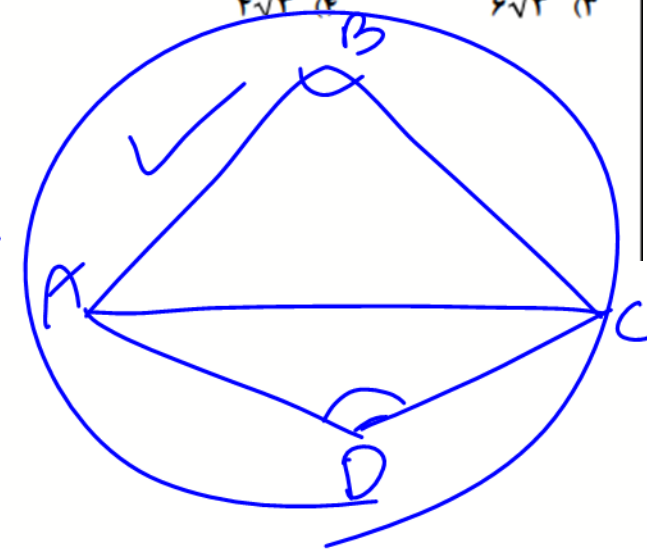
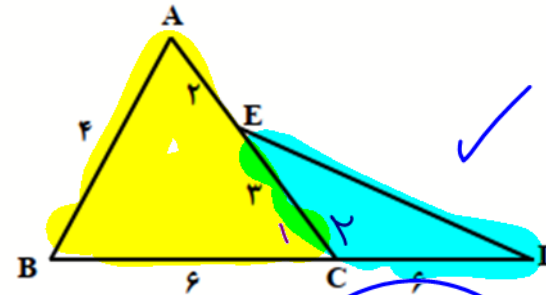
۴۷

$4\sqrt{2}$ (۲)

$6\sqrt{2}$ (۱)

$4\sqrt{3}$ (۴)

$6\sqrt{3}$ (۳)



$$\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$\cos C_2 = -\cos C_1$$

$$14 = 34 + 25 - 2(4)(5)\cos C_1$$

$$\cos C_1 = \frac{45}{40} = \frac{9}{8}$$

$$\cos C_2 = -\frac{9}{8}$$

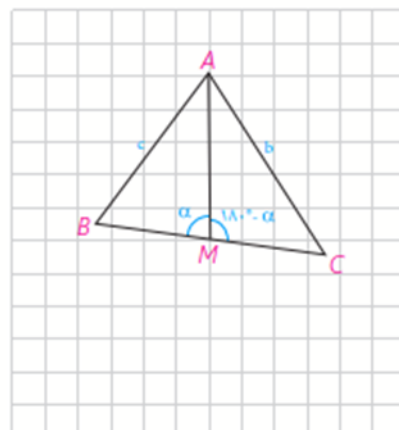
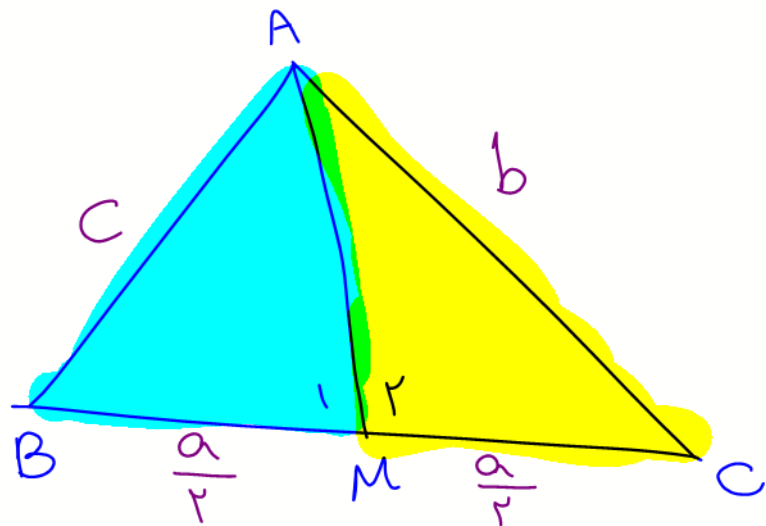
$$DE^2 = 9 + 34 - 2(3)(4)\left(-\frac{9}{8}\right)$$

$$DE^2 = 1 \times 9 \Rightarrow DE = 3$$



پویش علمی
ماندگار البرز



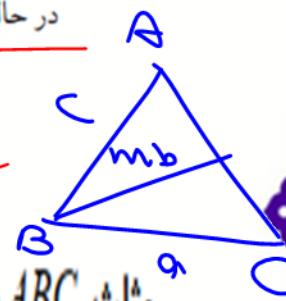


۴- در مثلث ABC ، میانه AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{2}$). با نوشتن قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC ، b^2 و c^2 را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (\text{قضیه میانه‌ها})$$

در حالت خاص $AB=4$ و $AC=6$ ، $BC=8$ ، طول میانه AM را به دست آورید.

$$34 + 14 = 2(Am^2) + 32$$



مثلث ABC با اضلاع $AB=6$ ، $BC=8$ ، $AC=4$ مفروض است حاصل $m_b^2 - m_c^2$ چقدر است؟

$$\triangle ABM: c^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - 2(AM)\left(\frac{a}{2}\right)\cos M_1$$

$$\triangle AMC: b^2 = \frac{a^2}{4} + AM^2 - 2(AM)\left(\frac{a}{2}\right)\cos M_2$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2$$

$$m_b^2 - m_c^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

$$c^2 - b^2 = 2(m_b^2 - m_c^2) + \frac{b^2 - c^2}{2}$$